

Problème : Stockage inter saisonnier de chaleur.

(Thème : équation différentielle du 1^{er} ordre, résolution exacte et avec GeoGebra)

Le réseau de chaleur de la ville de Marstal au Danemark utilise 33 000 m² de capteurs solaires thermiques (fournissant 12 MW au maximum).

Afin de stocker la chaleur produite par ces capteurs, un réservoir d'eau de 75 000 m³ a été construit à proximité. Ces capteurs fournissent 55 % de la chaleur consommée par 6000 habitants, les 45 % restant proviennent d'une chaufferie à biomasse.

www.solarmarstal.dk www.aeroeisland.com

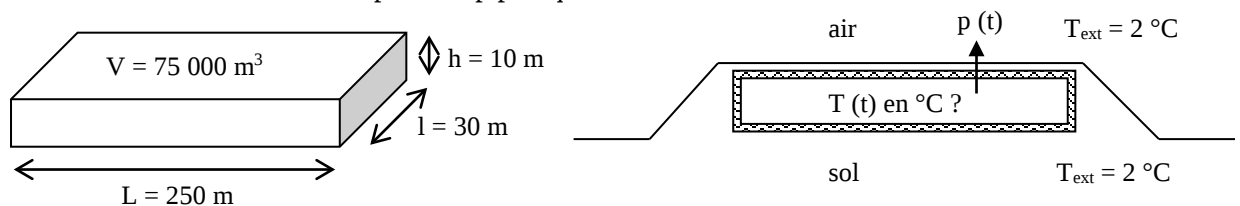


Problématique : Peut-on garder l'eau chaude dans ce type de réservoir pendant plusieurs mois (jusqu'au début de l'hiver) ?

Quelle baisse de température observe-t-on sur plusieurs mois sans soleil ?

Quels sont les paramètres importants dans ce problème ?

On considère le réservoir suivant, de forme parallélépipédique et contenant 75 000 m³ d'eau.



Ce réservoir est entouré sur toute sa surface extérieure par une épaisseur $e = 0,40$ m d'isolant thermique, de coefficient de conductivité thermique $0,04$ W/(m.°C).

On souhaite modéliser l'expérience suivante :

- les 75 000 m³ d'eau sont portés à $T(0) = 70$ °C, à la fin du mois d'août (comme par le parc solaire ci-dessus),
- aucune quantité de chaleur n'est apportée ni enlevée aux 75 000 m³ d'eau jusqu'à fin octobre,

- la température de l'eau reste uniforme dans tout le réservoir (comme si celle-ci était en permanence mélangée),
- la température extérieure (du sol comme de l'air) reste constante et égale à 2 °C pendant toute la période d'observation,

en vue de répondre à la question suivante : en vue d'un stockage intersaisonnier de chaleur solaire, comment va baisser la température $T(t)$ des 75 000 m³ d'eau dans le réservoir au cours du temps t ?

La chaleur massique de l'eau liquide est $c_{\text{eau}} = 4180 \text{ J/(kg.°C)}$.

1) Modélisation

Le coefficient de conductivité thermique de l'isolant est $\lambda = 0,04 \text{ W/(m.°C)}$.

La résistance thermique de la paroi du réservoir peut être donnée par :

$$r = \frac{e_{\text{isolant}}}{\lambda_{\text{isolant}}} \quad (\text{en m}^2 \cdot \text{°C/W}) \quad \text{avec } e \text{ l'épaisseur de l'isolant exprimée en m.}$$

On néglige les fuites de chaleur au niveau des jonctions réservoir/tuyaux d'arrivée et de sortie.

a) Calculer r ainsi que le coefficient de transmission surfacique U (en $\text{W/m}^2 \cdot \text{°C}$) de la paroi, donné par $U = \frac{1}{r}$.

$$r = \dots \quad U = \dots$$

Chaque m² de paroi laisse fuir U watt (ou joule/seconde) de chaleur si il y a 1 °C d'écart entre l'intérieur et l'extérieur de cette paroi.

Chaque m² de cette paroi laisse fuir $U \times \Delta T$ watt de chaleur si il y a un écart de température ΔT (en °C) entre l'intérieur et l'extérieur de cette paroi.

On a donc l'expression de la perte de chaleur (en watt ou J/s) à travers les parois du réservoir :

$$p(t) = S \times U \times \Delta T = S \times U \times (T_{\text{ext}} - T(t))$$

b) Calculer l'aire S de la surface *extérieure* du réservoir.

$$S = \dots$$

En déduire l'expression de $p(t)$, en watt (ou J/s), en fonction de $\Delta T = (T_{\text{ext}} - T(t))$

$$p(t) = \dots \times (T_{\text{ext}} - T(t)) = \dots$$

c) On raisonne sur un intervalle de temps infiniment court dt (en s).

$m \times c \times \Delta T = 75\,000\,000 \times 4180 \times [T(t + dt) - T(t)] = \text{quantité de chaleur } (< 0, \text{ en J}) \text{ perdue pendant la durée } dt \text{ par les } 75\,000\,000 \text{ kg d'eau du réservoir, alors que leur température passe de } T(t) \text{ à } T(t + dt)$

$p \times dt = 2153 \times (T_{\text{ext}} - T(t)) \times dt = \text{quantité de chaleur } (< 0, \text{ en J}) \text{ traversant pendant la durée } dt \text{ les } 21\,530 \text{ m}^2 \text{ de paroi du réservoir}$

$$\text{Ainsi, } 75\,000\,000 \times 4180 \times [T(t + dt) - T(t)] = 2153 \times (T_{\text{ext}} - T(t)) \times dt$$

$$\Leftrightarrow 145\,610\,776 \frac{T(t + dt) - T(t)}{dt} = T_{\text{ext}} - T(t)$$

$$\Leftrightarrow 145\,610\,776 \cdot T'(t) = T_{\text{ext}} - T(t) \quad \text{avec } T'(t) \text{ la « vitesse » (en °C/s) à laquelle baisse la température de l'eau}$$

lorsque dt tend vers 0 et en faisant l'hypothèse que $t \mapsto T(t)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$:

$$145\,610\,776 \cdot T'(t) + T(t) = 2 \quad (\text{E})$$

(E) est une équation différentielle du 1^{er} ordre, avec un second membre qui est $T_{\text{ext}} = 2$, d'inconnue la température $T(t)$, en °C, de l'eau du réservoir en fonction du temps t , en secondes.

2) Résolution de l'équation différentielle (E) : $145\,610\,776.T'(t) + T(t) = 2$

a) 1^{ère} étape : Déterminer la solution générale T_1 de l'équation différentielle sans second membre

$$(E') : 145\,610\,776.T'(t) + T(t) = 0$$

b) 2^{ème} étape : Déterminer une fonction constante T_2 solution de l'équation différentielle avec second membre (E).

c) 3^{ème} étape : Déterminer la solution générale T de l'équation différentielle avec second membre (E).

d) 4^{ème} étape : Déterminer la solution particulière $T(t)$ de (E) vérifiant la condition initiale $T(0) = 70\,^{\circ}\text{C}$ (la température de l'eau à l'instant où l'on débute l'expérience est la seule connue : elle vaut $70\,^{\circ}\text{C}$.)

e) Compléter le tableau suivant :

Temps t (en s)	0	86 400 s (soit 1 jour)	604 800 s (soit 7 jours)	2 592.10 ³ s (soit 1 mois)	5 184.10 ³ s (soit 2 mois)	7 776.10 ³ s (soit 3 mois)	15 552.10 ³ s (soit 6 mois)
Température T(t) (en °C) = ...	70 °C	...					

Les pertes de chaleur à travers les parois du réservoir vous paraissent-elles importantes ?

Un stockage intersaisonnier paraît-il possible ?

f) Tracer la courbe représentative de la fonction T à l'aide du logiciel GeoGebra pour $t \in [0 ; 15\,552.10^3 \text{ s}]$.

3) Généralisation : Influence des différents paramètres $L, l, h, e, \lambda, T(0), T_{\text{ext}}$

On peut généraliser la démarche afin de pouvoir étudier l'importance de paramètres comme la température extérieure, l'épaisseur d'isolant, le volume d'eau stocké, la forme du réservoir ...

$$r = \frac{e}{\lambda} \quad U = \frac{\lambda}{e}$$

$$p(t) = 2 \times [(h + 2e) \times (l + 2e) + (L + 2e) \times (h + 2e) + (L + 2e) \times (l + 2e)] \times \frac{\lambda}{e} \times (T_{\text{ext}} - T(t))$$

L'équation différentielle (E) qui modélise le refroidissement de l'eau vient alors de :

$$4\,180\,000 \text{ L.l.h.} [T(t + dt) - T(t)] = 2. [(h + 2e). (l + 2e) + (L + 2e). (h + 2e) + (L + 2e). (l + 2e)] \cdot \frac{\lambda}{e} \cdot (T_{\text{ext}} - T(t)). dt$$

$$\Leftrightarrow 4\,180\,000 \text{ L.l.h.} T'(t) = 2. [(h + 2e). (l + 2e) + (L + 2e). (h + 2e) + (L + 2e). (l + 2e)] \cdot \frac{\lambda}{e} \cdot (T_{\text{ext}} - T(t))$$

$$\Leftrightarrow T'(t) = 2. [(h + 2e). (l + 2e) + (L + 2e). (h + 2e) + (L + 2e). (l + 2e)] \cdot \frac{\lambda}{e} \cdot \frac{1}{4180000 \text{ L.l.h.}} (T_{\text{ext}} - T(t))$$

a) Sur un fichier GeoGebra, créer :

- un curseur L allant de 0 à 500 m avec un incrément de 10 m
- un curseur l allant de 0 à 50 m avec un incrément de 2
- un curseur h allant de 0 à 50 m avec un incrément de 2
- un curseur T_{ext} , représentant la température extérieure, allant de -30°C à $+20^{\circ}\text{C}$ avec un incrément de 2°C
- un curseur e , représentant l'épaisseur d'isolant, allant de 0 à 1 m avec un incrément de 0,05 m
- un curseur λ , représentant le coefficient de conductivité thermique de l'isolant (en $\text{W}/(\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C})$), allant de 0,03 (polyuréthane) à 0,1 (argile expansée) avec un incrément de 0,01

- un curseur T_0 , représentant la température intérieure initiale $T(0)$, allant de $+ 60^\circ\text{C}$ à $+ 80^\circ\text{C}$ avec un incrément de 5°C

b) Dans le logiciel GeoGebra, **RésolEquaDiff**[$f(x,y)$, x_{initial} , y_{initial} , x_{final} , pas] permet de tracer la représentation graphique de la solution de l'équation différentielle : $y'(x) = f(x, y)$.

Tracer la représentation graphique de la fonction T sur l'intervalle $[0 ; 7\,776.10^3 \text{ s}]$ (soit 3 mois)] avec un pas de calcul de 60 s en entrant dans la barre de saisie :

RésolEquaDiff[$2*((h + 2*e)*(l + 2*e) + (L + 2*e)*(h + 2*e) + (L + 2*e)*(l + 2*e))*\lambda/e*1/(4180000*L*I*h)*(T - y), 0, T_0, 7776000, 60$]

c) Modifiez chacun des curseurs afin d'évaluer l'influence de chacun des paramètres. Lesquels semblent avoir le plus d'importance ?

Corrigé :

1) Modélisation

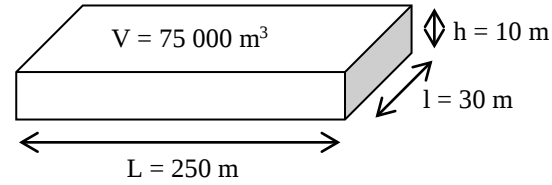
a) Calculer r ainsi que le coefficient de transmission surfacique U de la paroi, donné par $U = \frac{1}{r}$.

$$r = 0,4/0,04 = 10 \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$$

$$U = 1/10 = 0,1 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

b) Calculer l'aire S de la surface *extérieure* du réservoir.

$$\begin{aligned} S &= 2 \times [(h + 2e) \times (l + 2e) + (L + 2e) \times (h + 2e) + (L + 2e) \times (l + 2e)] \\ &= 2 \times [10,8 \times 30,8 + 250,8 \times 10,8 + 250,8 \times 30,8] \\ &\approx 21\,530 \text{ m}^2 \text{ (e étant l'épaisseur d'isolant = 0,4 m)} \end{aligned}$$



$$p(t) = S \times U \times \Delta T = 2153 \times (T_{\text{ext}} - T(t))$$

2) Résolution de l'équation différentielle (E) : $145\,610\,776 \cdot T'(t) + T(t) = 2$

a) 1^{ère} étape : $T_1(t) = k e^{-6,87 \cdot 10^{-9} \cdot t}$ est la solution générale de (E') : $145\,610\,776 \cdot T'(t) + T(t) = 0$

b) 2^{ème} étape : $145\,610\,776 \times 0 + c = 2$ donc $c = 2 = T_2(t)$ est solution particulière de (E).

c) 3^{ème} étape : $T(t) = k e^{-6,87 \cdot 10^{-9} \cdot t} + 2$ est la solution générale T de (E).

d) 4^{ème} étape : $T(0) = k e^0 + 2 = k + 2 = 70$ donc $k = 68$ et $T(t) = 68 e^{-6,87 \cdot 10^{-9} \cdot t} + 2$ est la solution particulière cherchée.

e)

Temps t (en s)	0	86 400 s (soit 1 jour)	604 800 s (soit 7 jours)	$2\,592 \cdot 10^3$ s (soit 1 mois)	$5\,184 \cdot 10^3$ s (soit 2 mois)	$7\,776 \cdot 10^3$ s (soit 3 mois)	$15\,552 \cdot 10^3$ s (soit 6 mois)
Température $T(t)$ (en $^\circ\text{C}$) $= 68 e^{-6,87 \cdot 10^{-9} \cdot t} + 2$	70 $^\circ\text{C}$	69,96 $^\circ\text{C}$	69,72 $^\circ\text{C}$	68,8 $^\circ\text{C}$	67,62 $^\circ\text{C}$	66,46 $^\circ\text{C}$	63,11 $^\circ\text{C}$

Les pertes de chaleur à travers les parois du réservoir sont très faibles (seulement 3,5 $^\circ\text{C}$ en 3 mois !).
Un stockage intersaisonnier paraît donc possible.

3) Généralisation : Influence des différents paramètres $L, l, h, e, \lambda, T(0), T_{\text{ext}}$

Dans GeoGebra : **RésolEquaDiff**[$f(x,y)$, x_{initial} , y_{initial} , x_{final} , **pas**] permet de tracer la représentation graphique de la solution de l'équation différentielle : $y'(x) = f(x, y)$.

RésolEquaDiff[$2 \cdot [(h + 2e) \cdot (l + 2e) + (L + 2e) \cdot (h + 2e) + (L + 2e) \cdot (l + 2e)] \cdot \frac{\lambda}{e} \cdot \frac{1}{4180000 \cdot L \cdot l \cdot h} \cdot (T_{\text{ext}} - y), 0, T_0, 7776000, 60]$