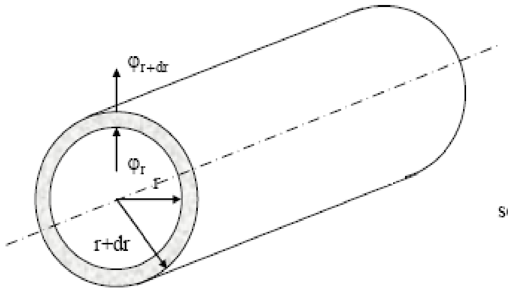
2.2.1.4 *Cylindre creux long (tube)*

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ, de rayon intérieur r_1, de rayon extérieur r_2, de longueur L, les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2. On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et r + dr :



$$\varphi_r = \varphi_{r+dr}$$

avec $\varphi_r = -\lambda\, 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r$

et $\varphi_{+dr} = -\lambda\, 2\pi (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$

soit $-\lambda\, 2\pi\, r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r = -\lambda\, 2\pi\, (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$

d'où $r\,\frac{dT}{dr} = C$

Avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

D'où :

$$\boxed{T(r) = \frac{T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} \qquad (°C) \qquad (2.10)$$

Et par application de la relation $\varphi = -\lambda\, 2\pi\, r\,\frac{dT}{dr}$, on obtient :

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi\,\lambda\, L\,(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} \qquad (W) \qquad (2.11)$$